**MAI 2 Funkce, definované implicitně – několik řešených příkladů**

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu $(x_0,y_0)$ definována implicitně funkce $y=f(x)$, je-li
$$F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3 \quad \text{a} \quad (x_0,y_0)=(1,2) \;,$$
Pak i) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;
ii) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0$ pomocí Taylorova polynomu 2.stupně.

2. a) Ukažte, že rovnicí $e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0$
je v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$ definována implicitně funkce $z=f(x,y)$.
b) Určete $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$
c) Pomocí Taylorova polynomu 1.stupně určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.
d) Určete $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$ .

3. a) Dokažte, že rovnicí $z^3-x^2-2y^2+xy-2yz+11y-15=0$
je v okolí bodu $(1,2,2)$ definována implicitně funkce $z=g(x,y)$ .
b) Ukažte, že bod $(1,2)$ stacionárním bodem funkce $g(x,y)$.
c) Má funkce $g(x,y)$ v bodě $(1,2)$ lokální extrém?

4. (i) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)$ a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce $F$ je v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ nenulová.
(ii) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě $(x_0,y_0,z_0)$ k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ , když $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$.

<u>Soustavy implicitně definovaných funkcí.</u>

1. Ukažte, že soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x^2+y^2&=z \\ x+y+z&=2 \qquad (*) \end{aligned}$$
jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ definovány implicitně funkce $y=f(x)$ , $z=g(x)$.
Určete $f'(-1)$ a $g'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*) , v bodě $(-1,1,2)$.

2. Ukažte, že soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x+y-2u^2+v^2&=0 \\ x-y-uv&=0 \end{aligned}$$
jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$ definovány implicitně funkce $u=f_1(x,y)$ , $v=f_2(x,y)$.
Určete totální diferenciál zobrazení $f=(f_1,f_2)$ v bodě $(1,0)$.

## Řešení příkladů

(1.) $F(x,y) = x^3+y^3-3xy-3, \ (x_0,y_0)=(1,2)$

1) $F(1,2) = 1+8-6-3=0$
2) $F\in C^\infty(R^2)$
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 3(y^2-x)\Big|_{(1,2)} = 9 \ (\neq 0)$

$\Rightarrow$ (věta o implicitní funkci)

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(x_0,y_0)=(1,2)$ je rovnicí $F(x,y)=0$ implicitně definována funkce $y=f(x)$ $(\in C^\infty(\mathcal{U}(1)))$, $f(1)=2$, která splňuje rovnici

$$(1) \quad x^3+f^3(x)-3xf(x)-3=0 \quad \text{v } \mathcal{U}(1).$$

(i) Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

Můžeme derivovat rovnici (1) (a dosazenou):

$$3x^2+3f^2(x)f'(x)-3f(x)-3xf'(x)=0$$

$$(2) \qquad f'(x)(f^2(x)-x) = -x^2+f(x)$$

$$\text{v } x=1: \quad f'(1)\cdot 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{f'(1)=\tfrac{1}{3}}$$

a derivací (2): $\quad f''(x)(f^2(x)-x)+f'(x)(2f(x)\cdot f'(x)-1) = -2x+f'(x)$

$$\text{v } x=1 \quad f''(1)\cdot 3 + \tfrac{1}{3}(2\cdot 2\cdot \tfrac{1}{3}-1) = -2+\tfrac{1}{3}, \text{ a odtud}$$

$$\underline{f''(1) = -\tfrac{16}{27}}$$

nebo: užitím vzorce pro derivaci implicitně def. funkce (z věty)

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \quad \text{v } \mathcal{U}(1), \text{ tedy}$$

$$f'(x) = -\frac{3(x^2-f(x))}{3(f^2(x)-x)} \quad \text{a odtud } f'(1)=\frac{1}{3}$$
$$(f(1)=2)$$

a dále:
$$f''(x) = \left(\frac{-(x^2-f(x))}{f^2(x)-x}\right)' = \frac{(f'(x)-2x)(f^2(x)-x)-(f(x)-x^2)(2f(x)f'(x)-1)}{(f^2(x)-x)^2}$$
$$= \ldots\ldots$$

(ii) $$\underline{T_2^{f,1}(x) = 2+\tfrac{1}{3}(x-1)-\tfrac{8}{27}(x-1)^2 \quad \text{v } \mathcal{U}(1)}$$

(2) $\left(F(x,y,z)\equiv\right)\quad e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0 \quad \ldots\ldots \underline{(1)}$

$(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$

a) <u>existence řešení (1)</u> $z=f(x,y)$ (existence impl. def. fce v okolí $(1,1,2)$):

$$\left.\begin{array}{l} F\in C^\infty(R^3) \\ F(1,1,2)=1-2+4-2-1=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)=e^{z-2x}-x+2y\Big|_{(1,1,2)}=1-1+2=2\ (\neq 0) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle věty o implicitní funkci) rovnice (1) je v okolí bodu $(1,1,2)$ definována implicitní funkce $z=f(x,y)\in C^\infty(\mathcal{U}(1,1))$, $f(1,1)=2$ a která řeší (1), tj:

$\underline{(2)}\ldots\ \underline{e^{f(x,y)-2x}-x\,f(x,y)+2y\,f(x,y)-2y-xy^2=0 \quad v\ \mathcal{U}(1,1)}$

b) <u>výpočet parciálních derivací funkce $f(x,y)$ v bodě $(1,1)$</u>:
(derivací rovnice (2) nebo opět lze užít vzorce v větě)

<u>$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ derivací rovnice (2)</u>:

$$e^{f(x,y)-2x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-2\right)-f(x,y)-x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+2y\frac{\partial f}{\partial x}-y^2=0 \quad v\ \mathcal{U}(1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(e^{f(x,y)-2x}-x+2y\right)=2e^{f(x,y)-2x}+f(x,y)+y^2 \quad \ldots\ \underline{(4)}$$

v $(1,1)$: $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot 2 = 2+2+1 \quad \Rightarrow \underline{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{5}{2}}$

<u>$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$</u>: $\quad e^{f(x,y)-2x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+2f(x,y)+2y\frac{\partial f}{\partial y}-2-2xy=0$

(derivací (2)) $\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(e^{f(x,y)-2x}-x+2y\right)=2+2xy-2f(x,y) \ \ldots\ \underline{(3)}$

v $(1,1)$: $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot 2 = 2+2-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0}$

c) $\underline{T_1^f(x,y)=2+\frac{5}{2}(x-1)}$ (tj. $f(x,y)\cong 2+\frac{5}{2}(x-1)$ v $\mathcal{U}(1,1)$)

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$ $\left( = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) \text{ dík spojitosti } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ v bodě } (1,1) \right)$

derivací (3) dle x (nebo obráceně, derivace (4) dle y)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \left( e^{f(x,y)-2x} - x + 2y \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( e^{f(x,y)-2x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \right) - 1 \right) = 2y - 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

v bodě (1,1): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) \cdot 2 = 2 - 2 \cdot \dfrac{5}{2}$ , tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = -\frac{3}{2}$$

(3) $\left( F(x,y,z) \equiv \right) \; z^3 - x^2 - 2y^2 + xy - 2yz + 11y - 15 = 0 \quad \dots (1)$

$(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$

a) $F(1,2,2) = 8 - 1 - 8 + 2 - 8 + 22 - 15 = 0$ , $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,2,2) = 3z^2 - 2y \Big|_{(1,2,2)} = 12 - 4 = 8 \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (dle věty o implicitní funkci) rovnice (1) je v okolí bodu (1,2,2) implicitně definována funkce $z = g(x,y) \in C^\infty(\mathcal{U}(1,2))$, $g(1,2) = 2$, a platí v okolí $\mathcal{U}(1,1)$

$$g^3(x,y) - x^2 - 2y^2 + xy - 2y\,g(x,y) + 11y - 15 = 0 \quad \dots (2)$$

b) parciální derivace $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)$ :

(derivováním (2) nebo vzorečem)

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ (derivováním (2)) :

$$3g^2(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - 2x + y - 2y \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \left( 3g^2(x,y) - 2y \right) = 2x - y \quad \dots (3)$$

v (1,2): $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2) \cdot 8 = 2 - 2 \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 0$

$\frac{\partial g}{\partial y}(1,2)$ : $\quad 3g^2(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - 4y + x - 2g(x,y) - 2y\frac{\partial g}{\partial y} + 11 = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y}\left(3g^2(x,y) - 2y\right) = 4y - x + 2g(x,y) - 11 \quad \text{---} \ \underline{(4)}$$

$$v\,(1,2):\quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,2)\cdot 8 = 8 - 1 + 4 - 11 \Rightarrow \underline{\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 0},$$

tedy, bod (1,2) je stacionární bod funkce $g(x,y)$.

c) Je v bodě (1,2) lokální extrém?

Výpočet druhých derivací fce $g$:
(derivováním (3), resp. (4) – lze také z příslušných vzorců z věty)

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2)$ : $\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}(3)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(3g^2(x,y) - 2y\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\left(6g(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right) = 2$

$$v\,(1,2):\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2)\cdot 8 + 0 = 2 \Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2) = \frac{1}{4}}$$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,2)$ : $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\left(3g^2(x,y) - 2y\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\left(6g(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - 2\right) = -1$

$$v\,(1,2):\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,2)\cdot 8 + 0 = -1 \Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,2) = -\frac{1}{8} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,2)}$$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,2)$ : $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(3g^2(x,y) - 2y\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(6g(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - 2\right) = 4 - 2\frac{\partial g}{\partial y}$

$\left(\frac{\partial}{\partial y}(4)\right)$

$$v\,(1,2):\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,2)\cdot 8 + 0 = 4 \Rightarrow \underline{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,2) = \frac{1}{2}}$$

a tedy:

$$H(1,2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}, & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}, & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} > 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ fce $g(x,y)$ má v bodě (1,2) ostré lokální minimum